"J. M. Keynes", (BO)
C.F . 92001280376 - Tel. 0514177611 - Fax 051712435
e-mail: segreteria@keynes.scuole.bo.it- **sito web:** http://keynes.scuole.bo.

TRACCIA ELABORATO
ESAME DI MATURITA'
a.s. 2019/2020

Liceo Scientifico Tradizionale e
Opzione Scienze Applicate

Classi VGL e VLL

Docenti proff.sse D. Campanella e A. Riccioli

AVVERTENZE: Il candidato deve svolgere la prima parte della prova e almeno 10 quesiti di Matematica e 6 di Fisica (di cui 3 di teoria e 3 problemi) della seconda parte.

Prima parte:

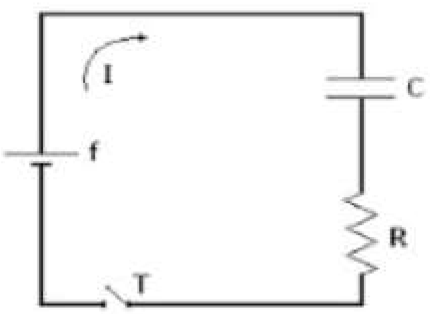
Il candidato risolva, argomentando opportunamente, il seguente problema

sia y = *f(x)* una funzione, scelta a piacere, derivabile nell'insieme R dei numeri reali, tale che $f(0)>0$ e $f(1) = 0$:

1) Indicare, facendo riferimento a Weirerstrass, un insieme in cui *f* ammette sia minimo che massimo assoluto e un insieme in cui la funzione non ammetta massimo assoluto ma ammetta il minimo assoluto;
2) Determinare la funzione $y = g(x)$ primitiva di $y = f(x)$ con $g(x_0) = 1$, essendo x_0 un punto scelto a piacere;
3) Calcolare l'equazione della retta tangente della retta tangente al grafico di $y = F(x)$, essendo $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ nel suo punto $x_1 = 1$;
4) Calcolare il $\lim_{x \to 1} \frac{F(x)}{f(x)}$

Posto y = i e x = t, con $t \geq 0$, interpretare la funzione $i = f(t)$ come la corrente che circola in una spira circolare di raggio r = 2 *dm*, posta nel vuoto. La corrente è misurata in Ampere ed il tempo in secondi:

1) Determinare la funzione B= B(t) che rappresenta, al variare del tempo, l'intensità del campo magnetico, misurata in Tesla, generato dalla corrente nel centro della spira;
2) Determinare il valore medio della funzione B = B(t) nell'intervallo di tempo [0; 1]
3) Un generatore di corrente è collegato ad un circuito resistivo-capacitivo (RC) come in figura:

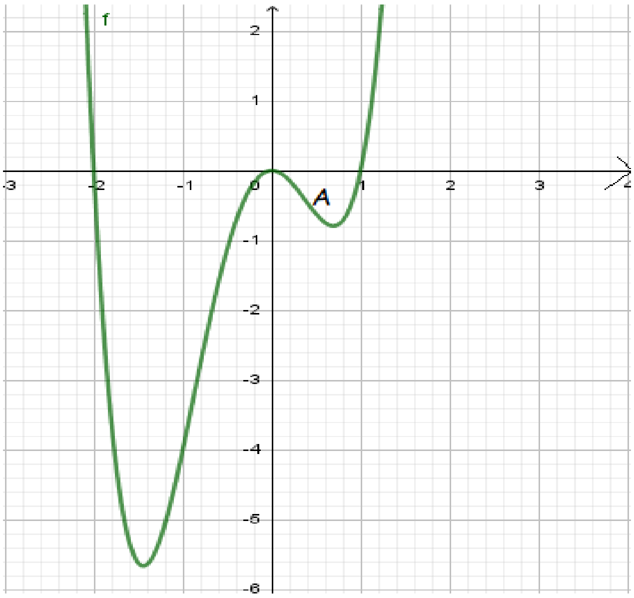


Resistenza R = 10 Ω, capacità C = 2 μF.

Sapendo che $I_0 = f(0)$ è la corrente erogata all'istante iniziale e che la carica presente sull'armature del condensatore in tale istante è 0, scrivere la funzione $Q = Q(t)$ che rappresenta la carica presente sul condensatore al variare del tempo. Rappresentare il grafico della funzione su un sistema di riferimento.

Seconda parte

Matematica: svolgere almeno 10 quesiti



1) Dato il grafico di $y = f(x)$

Ricavare grafico di

a) $y = f(2-x)$

b) $y = f'(x)$

c) della primitiva passante per l'origine

d) Trovare l'equazione di y = f(x) sapendo che è una funzione polinomiale di 4° grado e che l'area A compresa tra il grafico e l'asse x è 13/30.

2) Risolvere:

   a. Calcolare il seguente limite $\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{\sqrt{x}} sint^2\, dt}{x\sqrt{x}}$

   b. Sapendo che $\int_0^1 x^4 e^x dx = 9e - 24$ dedurre il valore dei seguenti integrali:

      i. $\int_0^1 x^5 e^x dx$ ii $\int_0^{1/2} x^5 e^{2x}\, dx$

3) Da un disco di ottone di raggio R assegnato (fig. 3), si ricava un settore circolare di ampiezza α che costituisce lo sviluppo del cono di una coppa (fig. 4). Quale deve essere il valore di α affinché la capacità della coppa sia massima?

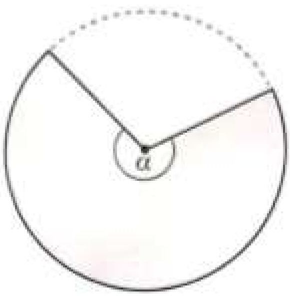


Figura 3

Figura 4

4) Data la funzione f(x) = x$\log_2 x - x - 1$, spiegare perché essa non è invertibile in tutto il suo dominio. Dopo aver verificato che la funzione si annulla per x = α, con $2 < \alpha < 3$, mostrare che invece la funzione è invertibile nell'intervallo $(\alpha, +\infty)$. Detta F(x) la funzione inversa di f(x) in tale intervallo, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di F(x) nel suo punto di coordinate (3; 4).

5) Il piano π è ortogonale al piano $\sigma: x + y + z = 1$ e passa per i punti A(1, -1, 2) e B(2, 3, -1). Scrivere l'equazione del piano π e stabilire se esiste qualche valore del parametro k per cui il punto P(k, k-1, k-2) appartiene a π.

6) Considerare la funzione $f(x) = a\frac{1-\cos 2x}{x^2} + bx\sin\frac{3}{x}$, determinare per quali valori dei parametri a e b risulta $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

7) Per quali valori di k l'equazione $e^{2x} = x + k$ ha due soluzioni reali e distinte

8) Discutere la verità della seguente affermazione: tra tutti i parallelepipedi rettangoli di volume unitario a base quadrata, il cubo è quello di superficie massima.

9) Dallo studio dell'andamento di una variabile economica y in funzione del tempo t (espresso in anni) emerge che la velocità istantanea di variazione di y è direttamente proporzionale al quadrato della stessa y. Sapendo che, nell'istante in cui l'analisi è iniziata (t = 0), il valore di y era uguale a 10 e che dopo 10 anni esso è diventato uguale a 100, ci si chiede dopo quanti anni la variabile assumerà valori negativi.

10) Tra tutte le primitive della funzione $f(x) = x\sqrt{5x^2 - 2}$, determinare quella che assume valore 16/15 per $x = \sqrt{\frac{3}{5}}$ e chiamarla F(x). Qual è l'equazione della retta tangente al grafico di F(x) nel punto di ascissa $\sqrt{\frac{6}{5}}$?

11) Per quale valore di k il limite per x→0 della funzione $f(x) = (x + e^{kx})^{\frac{1}{x}}$ risulta uguale a 2?

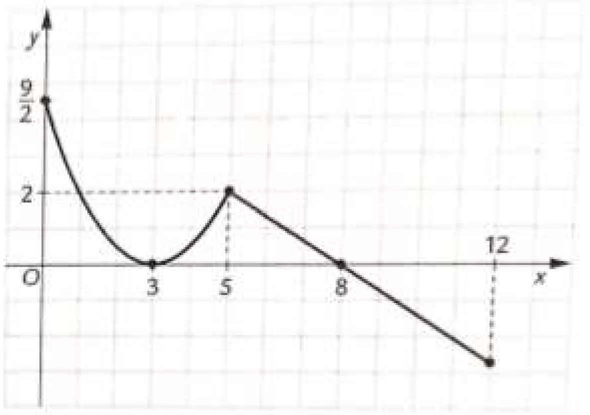
12) Considera la regione infinita di piano limitata dal grafico della funzione $f(x) = e^{-|x|}$ e dall'asse x.

a. Stabilire se tale regione di piano ha area finita e, in caso affermativo, specificarne il valore;
b. Stabilire se il solido che si ottiene ruotando tale regione attorno all'asse x ha volume finito e, in caso affermativo, specificarne il valore;
c. Stabilire se il solido che si ottiene ruotando tale regione attorno all'asse y ha volume finito e, in caso affermativo, specificarne il valore.

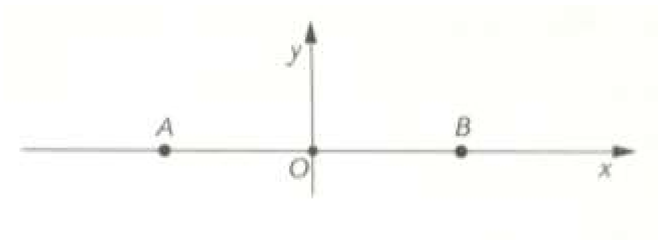
13) Una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo [-2; 6] e derivabile nell'intervallo (-2; 6). Si sa che f(6) = -1/3 e che la retta tangente al grafico in un generico punto dell'intervallo non ha

mai inclinazione superiore a 45° rispetto al semiasse positivo delle ascisse. E' possibile che f(-2) = sia uguale a -9?

14) In figura è rappresentato il grafico di una funzione $f: [0, 12] \to R$, costituita da un arco di parabola e da un segmento. Si consideri la funzione $g(x) = \int_1^x f(t)dt$, determinare i valori di g(3), g(11), g'(2), g'(9).



Fisica: svolgere almeno 3 problemi

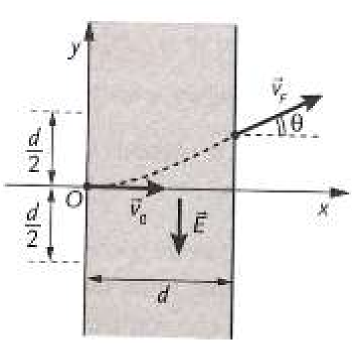
1) 

Nella figura, i punti A e B rappresentano, in sezione, due fili rettilinei paralleli infinitamente lunghi, disposti nel vuoto perpendicolarmente al piano *xy*, su ciascuno dei quali è distribuita uniformemente una carica elettrica positiva di densità lineare λ. Si suppone $A(-a, 0)$ e $B(a, 0)$, con $a > 0$.

a. Determinare le componenti del vettore campo elettrico $\vec{E}$ in un generico punto dell'asse *x* avente ascissa x.

Calcola il modulo di $\vec{E}$ nel punto $P(2a,\ 0)$, supponendo $a = 3{,}2\ cm$ e $\lambda = 2{,}0 \cdot 10^{-6}\ C/m$.

b. Determinare le componenti del vettore campo elettrico $\vec{E}$ in un generico punto sull'asse *y* avente ordinata y. Calcola il modulo di $\vec{E}$ nel punto $Q(0,\ 2a)$, utilizzando gli stessi dati del punto precedente.

2) 

Un elettrone (massa $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg$ e carica $-e$ con $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19} C$), in moto con velocità orizzontale $\vec{v_0}$, entra nell'istante $t = 0$ nella regione rappresentata dalla striscia grigia la cui larghezza misura d (in metri). Nella regione grigia è presente un campo elettrico uniforme e costante $\vec{E}$, perpendicolare a $\vec{v_0}$ e diretto verso il basso, come indicato in figura. L'elettrone esce dalla regione in cui è presente il campo elettrico con velocità $\vec{v_F}$. Indicati con v_0 e v_f ed E rispettivamente i moduli di $\vec{v_0}, \vec{v_F}$ e $\vec{E}$, dimostrare che:

a. Nel sistema di riferimento della figura (in cui l'origine coincide con il punto in cui l'elettrone entra nel campo elettrico e l'unità di misura su entrambi gli assi è il metro), la traiettoria dell'elettrone è descritta dalla funzione di equazione:

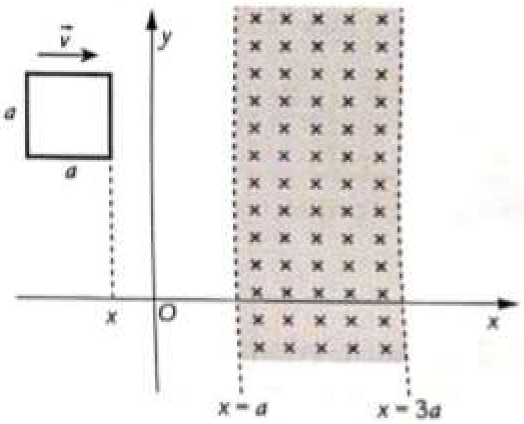
$$y = \begin{cases} \frac{eE}{2mv_0^2}x^2 & 0 \leq x \leq d \\ \frac{eEd}{mv_0^2}\left(x - \frac{d}{2}\right) & x > d \end{cases}$$

b. Dimostrare che $v_F = \sqrt{v_0^2 + \frac{e^2E^2d^2}{m^2v_0^2}}$

3) Il pione è una particella subatomica il cui tempo di vita medio, nel sistema di riferimento solidale al pione stesso, vale $\tau = 2{,}6 \cdot 10^{-8} s$. Misurando la velocità v di un pione, si trova che $v = 0{,}88c$. Qual è il tempo di vita medio τ_v del pione nel sistema di riferimento del laboratorio? Quale distanza percorre in questo tempo nel medesimo sistema di riferimento?

Il decadimento del pione è regolato dalla legge $N(t) = N_0 e^{-t/\tau}$, dove N_0 è il numero di pioni presenti al tempo t = 0 mentre N(t) è il numero di pioni al tempo t. Qual è la percentuale di pione del fascio che riescono a coprire almeno una distanza d = 20 m prima di subire il decadimento?

4) Una spira quadrata conduttrice di lato a e resistenza R si muove con velocità costante $\vec{v}$ verso destra, nel piano rappresentato in figura. La spira passa attraverso una regione in cui è presente un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ entrante nella pagina; la regione che è sede del campo magnetico corrisponde alla striscia limitata dalle rette di equazione $x = a$ e $x = 3a$. Indicata con x l'ascissa che rappresenta la posizione del lato destro della spira:



a. Traccia il grafico della funzione che esprime il flusso del campo magntico attraverso l'area racchiusa dalla spira in funzione di x.

b. Traccia il grafico della f.e.m. indotta nella spira in funzione di x.

Le funzioni ottenute presentano punti singolari o punti in cui non sono derivabili?

Fisica: rispondere ad <u>almeno</u> 3 quesiti. Scrivere non più di 10 righe per ogni quesito.

1) L'allievo descriva l'esperimento di Michelson e Morley ed il problema dell'etere.

2) Hertz fu tra i primi a realizzare un esperimento che gli permise di inviare le onde elettromagnetiche da un dispositivo e rilevarle con un altro. Descrivere tale esperimento.

3) L'allievo descriva le equazioni di Maxwell ed in particolare il termine mancante nella legge di Ampère.

4) L'allievo descriva la contrazione delle lunghezze.